線形代数 B/III 宿題その１ （改編 c）

(2014/11/11 講義対応分. 解答提出は 2014/11/18 の講義開始時)

解答は指定解答用紙を用いること。

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコ$\begin{pmatrix} \qquad & \qquad \end{pmatrix}$と、行列式を表すときの$\begin{vmatrix} \qquad & \qquad \end{vmatrix}$は明確に区別して記述すること。

（本解答例の他に、excel による計算例あり）

問１：固有値と固有ベクトルの概念の復習

今、行列とベクトルを次のように定義する。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1. $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$はおのおの$A\boldsymbol{a_1} = \lambda_1\boldsymbol{a_1}$, $A\boldsymbol{a_2} = \lambda_2\boldsymbol{a_2}$, $A\boldsymbol{a_3} = \lambda_3\boldsymbol{a_3}$ の関係を満足することを確認せよ。また、λ_1 , λ_2 , λ_3 の値を求めよ。

【略解】

	A			a_1		Aa_1		λ_1		$\lambda_1 a_1$
2	2	0		0		0				0
2	−1	0		0		0				0
1	2	2		−1		−2		2		−2
				a_2		Aa_2		λ_2		$\lambda_2 a_2$
2	2	0		2		6		3		6
2	−1	0		1		3		3		3
1	2	2		4		12		3		12
				a_3		Aa_3		λ_3		$\lambda_3 a_3$
2	2	0		−4		8		−2		8
2	−1	0		8		−16		−2		−16
1	2	2		−3		6		−2		6

2. 下の $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{y} = \alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \alpha_3\boldsymbol{a_3}$ の形に表すことを考える。この時のα_1 , α_2 , α_3 の値を一組示せ。導出過程も示すこと。用いた導出原理の教科書上での出典を示せ (ページ番号、行数、「～の定理」など)。

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -14 \\ 3 \\ -16 \end{pmatrix}$$

【略解】

α1	a1		α2	a2		α3	a3		y(calculated)	y(given)
	0			2			-4		-14	-14
-7	0	+	-5	1	+	1	8	=	3	3
	-1			4			-3		-16	-16

3. 単純に（Aと$\boldsymbol{y}$とで 3x3 と 3x1 の演算をして）$A\boldsymbol{y}$ を求めよ。導出過程を示すこと。

【略解】

	A		y		Ay
2	2	0	-14		-22
2	-1	0	3	=	-31
1	2	2	-16		-40

4. 上の 1. 2.で求めた関係を用いて $A\boldsymbol{y}$ を求めよ。その過程において、行列演算をせず（Aと$\boldsymbol{y}$とで 3x3 と 3x1 の演算をしない)、α_1, α_2, α_3 と、λ_1 , λ_2 , λ_3 を用いること。導出過程を示すこと。結果が 3.と一致するかどうか確かめよ。

【略解】

$\mathrm{A}\mathbf{y} = \mathrm{A}(\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \alpha_3\boldsymbol{a_3}) = \alpha_1\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\lambda_2\boldsymbol{a_2} + \alpha_3\lambda_3\boldsymbol{a_3}$

α1	λ1	a1		α2	λ2	a2		α3	λ3	a3		
		0				2				-4		-22
-7	2	0	+	-5	3	1	+	1	-2	8	=	-31
		-1				4				-3		-40

問２： 固有値と固有ベクトルの確認

1. 問１で用いた行列 A に対し、A の固有方程式を示せ。

【略解】

|A-λE|=0 からサラスの展開を経て (λ-2)(λ-3)(λ+2)=0

2. A の固有値を全て求めよ。必ず導出過程を示すこと。

【略解】

因数分解結果から 2,3,-2。

3. A の固有値全てについて、対応する固有ベクトルを示せ。必ず導出過程を示すこと。

【略解】

A				E				λ		A-λ E		
2	2	0		1	0	0				0	2	0
2	-1	0		0	1	0		2		2	-3	0
1	2	2		0	0	1				1	2	0
A				E				λ		A-λ E		
2	2	0		1	0	0				-1	2	0
2	-1	0		0	1	0		3		2	-4	0
1	2	2		0	0	1				1	2	-1
A				E				λ		A-λ E		
2	2	0		1	0	0				4	2	0
2	-1	0		0	1	0		-2		2	1	0
1	2	2		0	0	1				1	2	4

の左端を利用した (A-λE) ^{t}(x,y,z) = O から

λ=2: 1 行目から y=0 ⇒ 2 行目に代入して x=0 ⇒ z を残る自由度として $c_1{}^t(0,0,1)$

λ=3: 1,2 行目から x=2y, 3 行目から x+2y-z=0 ⇒ x=2y, z=4y ⇒ y を残る自由度として c_2 ${}^t(2,1,4)$

λ=-2: 1,2 行目から 2x+y=0, 3 行目から x+2y+4z=0 ⇒ y=-2x, x+2(-2x)+4z=0 ⇒ z=3x/4
⇒ x を残る自由度として $c_3{}^t(1,-2,3/4)$
ただし定数は 0 でない任意の複素数。

4. 問 1 で用いた、λ_1 , λ_2 , λ_3 が A の固有値であることを確認せよ。

【略解】

2-2 の解が 1-1 の解に一致していることを確認。

5. 問 1 で用いた $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ が各自で求めた固有ベクトルと同じか、そのスカラー倍になっていることを確認せよ。

【略解】

λ=2: c_1=-1 で問 1 と同じ。

λ=3: c_2=1 で問 1 と同じ。

λ=-2: c3=-4 で問 1 と同じ。

問３：固有値と固有ベクトルの計算

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & b \\ a & 1 & b & 0 \\ 0 & b & 1 & a \\ b & 0 & a & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. A に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトルを導出過程も含めて示せ。

【略解】

|A-λE|=0 から(λ-1)(λ-2)(λ+1)=0。そこから(A-λE) ^{t}(x,y,z)=O として固有ベクトルを求める。固有ベクトルの定数倍項は 0 でない複素数。

A				E				固有値		A−λ E				固有ベクト
6	−3	−7		1	0	0				5	−3	−7		2
−1	2	1		0	1	0		1		−1	1	1		1
5	−3	−6		0	0	1				5	−3	−7		1
A				E				固有値		A−λ E				固有ベクト
6	−3	−7		1	0	0				4	−3	−7		1
−1	2	1		0	1	0		2		−1	0	1		−1
5	−3	−6		0	0	1				5	−3	−8		1
A				E				固有値		A−λ E				固有ベクト
6	−3	−7		1	0	0				7	−3	−7		1
−1	2	1		0	1	0		−1		−1	3	1		0
5	−3	−6		0	0	1				5	−3	−5		1

2. B に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトルを導出過程も含めて示せ。

【略解】

|A-λE|=0 から(λ-3)(λ-3)(λ-6)=0。

単解： (A-λE) ^{t}(x,y,z)=O として固有ベクトルを求める。固有ベクトルの定数倍項は 0 でない複素数。

A				E				固有値		A−λ E				固有ベクト
4	1	1		1	0	0				−2	1	1		1
1	4	1		0	1	0		6		1	−2	1		1
1	1	4		0	0	1		※重解		1	1	−2		1

重解： $(A-\lambda E)\,{}^t(x,y,z)=O$ から

A				E				固有値		A-λ E		
4	1	1		1	0	0				1	1	1
1	4	1		0	1	0		3		1	1	1
1	1	4		0	0	1				1	1	1

となるので、$x+y+z=0$ のみが得られる。x,y を自由変数に取ると $z=-x-y$。

ゆえに固有ベクトルは(x を c_1, y を c_2 に見立てて) ${}^t(x,y,-x-y)\ \Rightarrow\ c_1(1,0,-1)+c_2(0,1,-1)$.ただし c_1, c_2 は 0 でない複素数。

3. C に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトルを導出過程も含めて示せ。

【略解】

$|A-\lambda E|=0$ から$(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-1)=0$。

固有値は 1 の三重解となる。

A				E				固有値		A-λ E		
1	0	0		1	0	0				0	0	0
0	1	0		0	1	0		1		0	0	0
0	0	1		0	0	1		※三重解		0	0	0

任意の x,y,z に対して$(A-\lambda E)\,{}^t(x,y,z)=O$ が成立する。自由変数を x,y,z に取り、それを c_1, c_2, c_3 に見立てると、$(x,y,z)\ \Rightarrow\ c_1(1,0,0)+c_2(0,1,0)+c_3(0,0,1)$。

4. D に対し、固有多項式、固有値を導出過程も含めて示せ。

【略解】

A					A-λ E			
1	a	0	b		1-λ	a	0	b
a	1	b	0		a	1-λ	b	0
0	b	1	a		0	b	1-λ	a
b	0	a	1		b	0	a	1-λ

ここで $m=1-\lambda$ とすると、$|A-\lambda E|$ の行列式は次のように展開できる。

$-2mmaa+mmmm+aaaa-2aabb-2mmbb+bbbb=0$

さらに $M=m^2$ とすると

$M^2-2(a^2+b^2)M+(a^2-b^2)^2=0$

$\{M-(a+b)^2\}\{M-(a-b)^2\}=0$

ゆえに

$M=m^2=(a+b)^2$ とすると $m=\pm(a+b)$つまり $1-\lambda=\pm(a+b)$から $\lambda=1\pm(a+b)$

$M=m^2=(a-b)^2$ とすると $m=\pm(a-b)$つまり $1-\lambda=\pm(a-b)$から $\lambda=1\pm(a-b)$

固有値はこの 4 つ。

5. F に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトルを導出過程も含めて示せ。

【略解】

A-λ E	
1-λ	-2
4	5-λ

$|A-\lambda E|=(1-\lambda)(5-\lambda)-(-2)4=\lambda^2-6\lambda+13=0$

$\lambda=3\pm 2i$

固有ベクトルはそれぞれ下記の左端。

λ_1	3+2i						
−2−2i	−2		−2(1+i)x−2y=0 → y = −(1+i)x				(x, −(1+i)x)
4	2−2i						
λ_2	3−2i						
−2+2i	−2		−2(1−i)x−2y=0 → y = −(1−i)x				(x, −(1−i)x)
4	2+2i						

問４：基底変換と座標変換

$\boldsymbol{R^3}$ について、ある基底を考える（ただし $\boldsymbol{e_1}$ は基本ベクトル(教科書 P12)とする。）

$$\boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{e_3}\ ,\ \boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{e_2}\ ,\ \boldsymbol{b_3} = \boldsymbol{e_1}$$

と、さらに別の基底として

$$\boldsymbol{c_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える。

1.　基底 $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}$ を基底　$\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3}$ に変換する基底変換行列 P を求めよ。

【略解】下記の P に相当。解法の一例は P89 例 2。

P88の定理でいう$b_1 \cdots b_n$								
c_1	c_2	c_3				P88でいう式(6)の右辺		
1	2	1				1	2	1
−1	−1	0				−1	−1	0
1	1	1				1	1	1
基底変換行列P								
1	1	1		P88の定理でいうa1…an	b_1=e_3	0	0	0
−1	−1	0				0	0	0
1	2	1				1	1	1
					b_2=e_2	0	0	0
						1	1	1
						0	0	0
					b_3=a_3	1	1	1
						0	0	0
						0	0	0

2. ある位置ベクトルを考えるとき、そのベクトルの基底 $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}$ による座標を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とし、基底　$\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3}$ による座標を $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ とする。この二つの座標間の関係を、1.の結果を手掛かりにして示せ。その根拠となる教科書の該当部を明記せよ（ページ、行数、「～の定理」など)。

【略解】

P85-P88 の間の該当する説明部分を指摘してあれば可。(基底変換に相当するがそれ以前のところでも説明が一致していれば可)

1つめの基底(定理でいう[$a_1,\cdots,a_n$])		
0	0	1
0	1	0
1	0	0

2つめの基底(定理でいう[$b_1,\cdots,b_n$])		
1	2	1
−1	−1	0
1	1	1

基底の変換行列P		
1	1	1
−1	−1	0
1	2	1

例えば、基底 $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}$ での座標(12,34,5)は基底変換行列Pにより基底 $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3}$ では(51,-46,85)となることがわかる。

変換後の座標			基底変換の行列P			元の座標	
X_1	51		1	1	1	12	x_1
X_2	−46	=	−1	−1	0	34	x_2
X_3	85		1	2	1	5	x_3

3. 基底 $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}$ による線形空間から基底 $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3}$ による線形空間への写像 f を考える。ただし

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

とする。この f についての表現行列 M を求めよ。導出過程も示せ。導出方法を示している教科書の該当部を明記せよ（ページ、行数、「～の定理」など）。

【略解】

下記の M を参照。

P85～P86の「線形写像の表現行列」に相当。

f		
3	2	0
−2	1	1
1	1	2

c_1	1	1	1
	−1	−1	−1
	1	1	1
c_2	2	2	2
	−1	−1	−1
	1	1	1
c_3	1	1	1
	0	0	0
	1	1	1

M(表現行列) $\{t_{ij}\}$		
1	−2	0
−2	1	2
3	2	−1

※解き方の一例：P86例1のようにして。

1つめの基底bi		
0	0	1
0	1	0
1	0	0

f($\mathbf{b}_1$)	f($\mathbf{b}_2$)	f($\mathbf{b}_3$)
0	2	3
1	1	−2
2	1	1

Mを用いた検算結果(左と同一に)		
0	2	3
1	1	−2
2	1	1